$\boxed{\text{UCT per } H^*}$

$\mathcal{C}$ complesso di catene di gruppi abeliani liberi, $H_n = H_n(\mathcal{C})$
G gruppo libero, $H^n_G = H^n(\mathcal{C}; G)$.

<u>Teorema</u>: c'è una successione esatta canonica

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}, G) \longrightarrow H^n_G \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n, G) \to 0$$

che splitta non canonicamente.

<u>Dimostrazione</u>: definisco $h_n : H^n_G \to \mathrm{Hom}(H_n, G)$
ponendo $h_n([\varphi])([u]) = \varphi(u)$ per $\varphi \in Z^n_G$, $u \in Z_n$.
È indipendente dai rappresentanti perché:

- $\varphi \in B^n_G \Rightarrow \varphi = \delta_{n-1}\psi \Rightarrow \varphi(u) = (\delta_{n-1}\psi)(u) = \psi(\partial_n u)$
$= \psi(0) = 0$

- $u \in B_n \Rightarrow u = \partial_{n+1} w \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(\partial_{n+1} w) = (\delta_n \varphi)(w)$
$= 0(w) = 0$.

Proviamo che splitta, cioè esiste $J_n : \mathrm{Hom}(H_n, G) \to H^n_G$
t.c. $h_n \circ J_n = id_{\mathrm{Hom}(H_n,G)}$, da cui la surgettività.

Notiamo che $0 \to Z_n \hookrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0$
splitta perché $B_{n-1} \subset C_{n-1}$ è libero; dunque
esiste $q_n : C_n \to Z_n$ con $q_n|_{Z_n} = id_{Z_n}$.

Definisco $j_n : \mathrm{Hom}(H_n, G) \to C^n_G$ come
$j_n(\varphi)(c) = \varphi([q_n(c)])$. Affermo che $\mathrm{Im}(j_n) \subset Z^n_G$:

$$(\delta_m(j_m(\varphi)))(d) = j_m(\varphi)(\partial_{m+1} d) =$$
$$= \varphi([q_m(\partial_{m+1} d)]) = \varphi([\partial_{m+1} d]) = \varphi(0) = 0$$
$$\forall d \in C_{m+1}$$

(ho usato il fatto che $\partial_{m+1} d \in B_m \subset Z_m$ dunque q_m lo lascia fisso)

$$\Rightarrow \delta_m(j_m(\varphi)) = 0 \Rightarrow j_m(\varphi) \in Z^m_G \quad \text{come voluto.}$$

Dunque j_m induce $$J_m : \mathrm{Hom}(H_m, G) \longrightarrow H^m_G$$
$$\varphi \longmapsto [j_m(\varphi)].$$

Ora $$((h_m \circ J_m)(\varphi))([w]) = (h_m([j_m(\varphi)]))([w])$$
$$= j_m(\varphi)(w) = \varphi([q_m(w)]) = \varphi([w]) \qquad \forall w \in Z_m$$

(ho usato ancora il fatto che $q_m|_{Z_m} = id_{Z_m}$)

$$\Rightarrow h_m \circ J_m = id_{\mathrm{Hom}(H_m, G)} \quad \text{come voluto.}$$

Resta da provare che $\mathrm{Ker}\, h_m$ si identifica a $\mathrm{Ext}(H_{m-1}, G)$. Per fare questo iniziamo a notare che

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Z_{m+1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "0"] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{m+1}"] \arrow[d, "\partial_{m+1}"] & B_m \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_m \arrow[r, hook] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "\partial_m"] \arrow[d] & B_{m-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

ha righe esatte che splittano, dunque dualizzando ho

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & \mathrm{Hom}(Z_{n+1},G) \arrow[l] \arrow[u, "0"] & C^{n+1}_G \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(B_n,G) \arrow[l, "\partial^*_{n+1}"'] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[l] \\
0 & \mathrm{Hom}(Z_n,G) \arrow[l] \arrow[u, "0"] & C^n_G \arrow[l] \arrow[u, "\delta^G_n"] & \mathrm{Hom}(B_{n-1},G) \arrow[l, "\partial^*_n"'] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[u, "0"] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u, "0"] &
\end{tikzcd}$$

con righe esatte, la quale pertanto induce una LES

$$\ldots \leftarrow \mathrm{Hom}(B_n,G) \xleftarrow{s_n} \mathrm{Hom}(Z_n,G) \leftarrow H^n_G \leftarrow \mathrm{Hom}(B_{n-1},G) \leftarrow \ldots$$

nella quale ho $\quad H_n(\mathrm{Hom}(B_n,G)) = \mathrm{Hom}(B_n,G)$ e
$\qquad H_n(\mathrm{Hom}(Z_n,G)) = \mathrm{Hom}(Z_n,G)$

perché in questi complessi tutti i bordi sono nulli, e
s_n è l'omomorfismo "difficile" costruito così:

$$\begin{tikzcd}
 & C^{n+1}_G & \mathrm{Hom}(B_n,G) \arrow[l, "\partial^*_{n+1}"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & \mathrm{Hom}(Z_n,G) \arrow[l] & C^n_G \arrow[l] \arrow[u, "\delta^G_n"] &
\end{tikzcd}$$

dato $\varphi \in \mathrm{Hom}(Z_n,G)$ si prende $\psi \in C^n_G$ che abbia
φ come immagine, dunque va bene $\psi = \varphi \circ q_n$
(dove $q_n : C_n \to Z_n$ è la proiezione non canonica
già usata) e si dichiara $s_n(\varphi) = \eta$ se
$\partial^*_{n+1}\eta = \delta_n \psi$, ovvero

$$\begin{aligned}\eta(\partial_{m+1} w) &= (\delta_m^G \psi)(w)\\ &= \psi(\partial_{m+1} w)\\ &= \varphi(q_m(\partial_{m+1} w))\\ &= \varphi(\partial_{m+1} w) \qquad \forall w \in C_{m+1}.\end{aligned}$$

Questo significa che s_m non è altro che i_m^*, dove $i_m : B_m \to Z_m$ è l'inclusione, dato che $\eta = s_m(\varphi)$ non è che la restrizione di φ a B_m. ⊛

Possiamo allora prendere un segmento più indietro nella LES già considerata

$$\mathrm{Hom}(B_m, G) \xleftarrow{i_m^*} \mathrm{Hom}(Z_m, G) \leftarrow H_G^m \leftarrow \mathrm{Hom}(B_{m-1}, G) \xleftarrow{i_{m-1}^*} \mathrm{Hom}(Z_{m-1}, G)$$

e dedurne l'esatta corta

$$0 \leftarrow \mathrm{Ker}(i_m^*) \leftarrow H_G^m \leftarrow \mathrm{Coker}(i_{m-1}^*) \leftarrow 0$$

e visto che $0 \to B_{m-1} \xrightarrow{i_{m-1}} Z_{m-1} \to H_{m-1} \to 0$ è una risoluzione libera di H_{m-1}, abbiamo

$$\mathrm{Coker}(i_{m-1}^*) = \mathrm{Ext}(H_{m-1}, G)$$

e per concludere basta ora provare che la mappa naturale $H_G^m \to \mathrm{Ker}(i_m^*)$ non è altro che la h_m già costruita. Intanto abbiamo

$$B_m \xhookrightarrow{i_m} Z_m, \quad \mathrm{Hom}(B_m, G) \xleftarrow{i_m^*} \mathrm{Hom}(Z_m, G)$$

$$\varphi \in \mathrm{Ker}(i_m^*) \iff \varphi \in \mathrm{Hom}(Z_m, G),\ \varphi|_{B_m} = 0$$

dunque $Ker(i_m^*)$ si identifica in modo naturale a $Hom(H_m, G)$. Inoltre la mappa

$$Ker(i_m^*) \longleftarrow H_G^m$$

è l'abbreviazione di

$$Hom(Z_m, G) \longleftarrow H_G^m$$

che è indotta da

$$Hom(Z_m, G) \longleftarrow C_G^m$$

la quale manda φ in $\varphi|_{Z_m}$; pertanto $Ker(i_m^*) \leftarrow H_G^m$ è semplicemente $[\varphi] \longmapsto ([w] \longmapsto \varphi(w))$, dunque è h_m. ▨

⊛ Punto sottile: la dimostrazione che $\eta = \varphi|_{B_m}$ usa la proiezione non canonica $q_m : C_n \to Z_m$, ma la conclusione non dipende da q_m